1 アーンショーの定理

アーンショーの定理は、重力場、電場、磁場において静止物体を安定に浮上させることは不可能ということを示す定理である。

実は、アーンショーがこのような定義をしたわけではなく、1842 年に彼が発表した論文[1]をもとに、後世の研究者が、このような定理を言い出したというのが正解である。よって、その定理の真偽を論じることは、当のアーンショー先生にとっては傍迷惑なことかもしれない。なにしろ、故人であるから反論もできない。

このような事情はあるが、ここでは、現在、アーンショーの定理として知られているものを説明する。重力場、電場、磁場はいずれも目に見えないうえ、何もしなければ、ある空間にそのような場があるということに気がつかない。ただし、ある物理量を持ってくると力が働くので、はじめてその存在が分かる。ある物理量とは、重力場では質量（M）、電場では電荷(q)、磁場では磁荷(m)である。

それぞれの場における力は、距離の 2 乗に逆比例して

$$F = G\frac{M_1 M_2}{r^2} \qquad F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad F = \frac{1}{4\pi\mu}\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

とよく似た式で表現できることが知られている。比例定数は、G = 万有引力定数、ε= 誘電率、μ= 透磁率となる。

これらの場はよく似ているが、明確な違いもある。まず、電場と磁場では同種の電荷や磁荷に対しては斥力、異種のものには引力が働く。これに対し、重力場では引力しか働かない。

つぎに、電場では単位の電荷（負は電子、正は陽子）を取り出すことができるが、磁場では単位の磁荷（これをモノポールと呼ぶ）が存在しない。必ず、どんな小片にも N 極と S 極が存在する。永久磁石をどんなに分割しても必ず小磁石となるのは、このためである。

このような違いはあるものの、これら場では、力が $1/r^2$ に比例するので、ポテンシャルエネルギー（U）は $1/r$ に比例するという共通点がある。これは

$$F = \frac{dU}{dr} = \frac{k}{r^2}$$

という関係から

$$U = -\frac{k}{r}$$

となることで分かる。

ここで、物体が安定に位置するためには、ポテンシャルエネルギーは図 1(a)に示したように、下に凸のかたちをして、その極小が安定点となる。力という観点で見ると、この位置からずれようとすると、図のように、この安定点に引き戻す復元力が働くことになる。一方、図 1(b)のような上に凸のかたちをしていると、どのような位置においても復元力は働かない。

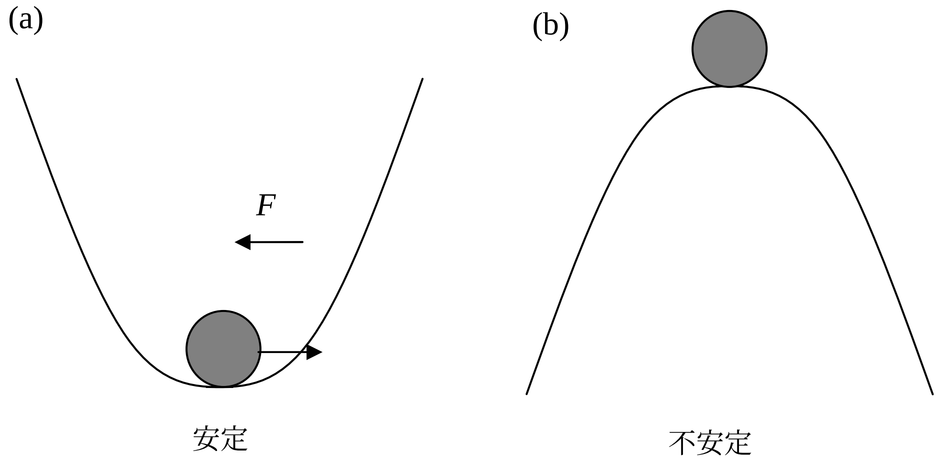

図 1 (a) 物体が安定であるためのポテンシャルのかたち。(b)のように極大がある場合には不安定となる。

ここで、物体がある位置で安定に浮上するという条件を考えてみよう。この位置で安定であるためには、x 方向でポテンシャルエネルギーは図 1(a)のようなかたちをしている必要がある。さらに、x 方向だけではだめで、y 方向でも z 方向でも同様のかたちをしていなければならない。いずれかの方向で、図 1(b)のようなかたちになっていると、その方向では、物体はこの位置からずれてしまう。

この条件を満足するには、まず極小となる条件から

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

という関係が必要となる。ただし、このままでは極大もありえるので、極小と

なる条件としては、高校の微分積分で習ったように

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0 \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} > 0 \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} > 0 \qquad (2)$$

をも満足する必要がある。以上の条件を満足すれば、ポテンシャルエネルギーは、どの方向でも極小となるので、x, y, z のいずれの方向からも復元力が働き、この位置が安定となる。

実は、アーンショーの定理は、$1/r$ のかたちをしたポテンシャルエネルギーは、この条件を満足することができないということを言っているのである。

ここで、U を x, y, z の関数と考えると

$$U = -\frac{k}{r} = U(x, y, z) = -\frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

となる。これから

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

という関係が導かれる [2]。この式はラプラス方程式と呼ばれており

$$\nabla^2 U = 0 \quad \text{あるいは} \quad \Delta U = 0$$

とも表記される。

さて、ここで先ほどの安定点の議論に戻って考えてみよう。もし、ラプラス方程式が成立しているとすると、この 3 つの項がすべて正になることはありえない。どれかひとつは負になる必要がある。

つまり、力が $1/r^2$ に比例する場、すなわちポテンシャルエネルギーが $1/r$ に比例する場では、(2)の条件を満足することはできないので、3 方向すべてで安定になることはない。よって、安定に空中に浮上することは不可能ということになる。これがアーンショーの定理の骨子である。

2 磁場の性質

アーンショーの定理だけで十分であるが、磁場に関しては、別の方法で浮上

の安定点がないことが証明できるので、それも紹介しておく。磁場は、電場と違って、モノポールがないという話をした。これをマックスウェル方程式で表現すると

$$div\vec{B} = 0$$

と書くことができる。ここで、$\vec{B}$ は磁場ベクトルである。これを成分で示すと

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

となる。ところで、磁場中に m に磁化された磁性体を置くと、この磁性体に働く力の x 成分は

$$F_x = m\frac{\partial B_x}{\partial x}$$

と与えられる。y, z 方向も同様である。ここで上の式の両辺に m をかけると

$$m\frac{\partial B_x}{\partial x} + m\frac{\partial B_y}{\partial y} + m\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

となるが、これら項はまさに力の x, y, z 成分に相当するので

$$F_x + F_y + F_z = 0$$

という力の関係式が得られる。つまり、3 方向で力の向きが同じになることはなく、必ず逆向きの力が成分として含まれることになる。例えば、F_x と F_y が復元力の時は、F_z はその逆となってしまうので、磁場中で磁性体を安定に浮かすことはできないのである。

1　S. Earnshaw: On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminferous ether, Trans. Camb. Phil. Soc., vol. 7 (1842) pp. 97 - 112.

2　この証明は高校生の数学でできるが、一応解答を示しておく。

$$U = -\frac{k}{r} = U(x, y, z) = -\frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

となったが

$$U = -k\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

のように書き直して、x に関する偏微分を行うと

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -k\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}}(2x) = kx\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

もう一度偏微分を行うと

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = k\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} - 3kx^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

となる。よって

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 3k\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} - 3k\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{5}{2}} = 0$$