自分の生活と数学は無関係と考えているひとが多い。実際に、普段の生活の中で、数学、特に、高等数学を直接使う場面に遭遇することはめったにない。しかし、知らず知らずのうちに、数学の恩恵にあずかっているのも事実である。電車がスムーズに動くのも、時計が正確に時を刻むのも、コンピュータやテレビが誤作動なく動くのも、その根底には数学がある。

この数学の中で、最も重要な分野が**微分**(differentiation)と**積分**(integration)と言われている。これらは、対で重要であるので、ひとまとめにして、**微積分**（calculus）と呼ばれることもある。それでは、なぜ微積分が重要なのであろうか。実は、微積分はなんらかの現象を数学的に解析する時の基本であり、物理、化学、電気工学、情報工学、経済学など数多くの学問分野の基礎をなすからである。

それでは、微分と積分とはいったいどのような手法であろうか。簡単に言えば、微分は部分に相当し、積分は全体に相当する。あるいは、微分は微小部分の変化の度合をみるものであり、積分は、その変化を統合した結果をみるものである。

例えば、ある現象を解析したいとしよう。その現象が時間的にどのように変化するかを、すべて観測できれば問題ないが、それには時間がかかりすぎたり、大変な労力を要する場合が多い。あるいは実質的に全体を観測することが不可能なことも多い。そこで、ある時間だけ、その変化を観測し、その様子を探る。そして、その変化に何らかの規則性があれば、それをヒントに全体像を把握する。これが微積分の手法である。大数学者のライプニッツは「微積分を使えば、すべての現象を解析することができる」と豪語している。実際に、それだけ有効な数学手法である。

微分方程式(differential equation)は、微分を利用して、ある現象の時間的あるいは空間的変化を表現したものである。そして、この微分方程式を積分の知識を利用して解けば、その現象の全体像をつかむことができる。

例えば、時速 3km/h という一定の速度で歩くひとの、位置(x)と時間(t)の関係は

$$\frac{dx}{dt} = 3$$

という式で表すことができるが、これも立派な微分方程式である。これを解法するには、積分を利用する。まず

$$dx = 3dt$$

のように移項して、両辺を積分すると

$$\int dx = 3\int dt$$

より

$$x = 3t + C \qquad (C\text{: 定数})$$

という関係が得られる。ここで、時間 $t = 0$ の時に、この人がスタート地点 $x = 0$ に居たとすれば

$$x = 3t$$

という式が得られる。これが全体像を与える。なぜなら、この式をもとに、この人が任意の時間にどこにいるかということを計算できるからである。これが微積分の効用である。

しかし、実際の現象はそれほど簡単ではない。いまの場合でも、人は同じ速度で歩きつづけることはない。やがて、疲れてしまって、歩く速度は低下していく。つまり、時間とともに速度は低下するはずである。これを考慮すると

$$\frac{dx}{dt} = 3 - kt$$

のように、時間とともに速度が減るという項-kt を付け加えなければならない。さらに、時間の 2 乗に比例してエネルギーが消耗するという場合には、さらに項が増えて

$$\frac{dx}{dt} = 3 - kt - mt^2$$

のような微分方程式となる。このように、実際の現象に近づけようとすると、微分方程式はどんどん複雑になっていく。そして、ライプニッツには申し訳ないが、その結果、解法できない微分方程式ができてしまう場合もある。むしろ、一般的には、解法できるものよりも、解法できない微分方程式の方が圧倒的に多いのである。もちろん、上記の微分方程式は簡単に解法可能であるが、つぎの微分方程式は、解析的に解くことができない。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (x^2 + t)\frac{dx}{dt} + t^3 = 0$$

一見したところ簡単そうであるが、どんなに工夫を凝らしても、この方程式を解くことはできない。この例のように、多くの微分方程式は解けないのである。それならば、そんな学問は学習する意味がないではないかと言われるかもしれないが、決してそうではない。

まず、幸いなことに、われわれが理工系の学問や経済などの実学で使う微分方程式には解法可能なものが多い。例えば、電気回路の設計は微分方程式を利用して行われている。ヒューレッドとパッカードがガレージでつくった音声発信機は、微分方程式に基づいたものである。

もちろん、数学は何かに応用するためだけにあるものではない。実際には役に立たない微分方程式に関しても、純粋数学的に検討が進められ、その結果、数学の問題として確立されたものもある。微分方程式の教科書の導入部で、演習問題として課される方程式のほとんどは実用的価値がないものである。しかし、微分方程式の解法を学ぶという観点からは有用となる。

さらに、純粋に数学的意味しかないと思われているものでも、後々、実学で役に立つようになることは、数学の世界ではよくあることである。最初に虚数が登場した時には、誰も何かの役に立つとは思わなかった。しかし、それが古典物理を根底からゆるがす量子力学の建設に大きな貢献を果たすことになる。

いずれにしても、微分方程式は、数学を何かに応用する際の基本となっているものであり、その解法を学ぶことは重要かつ有用である。微分方程式の解法については数多くの技法が蓄積されており、そのために混乱を招くこともあるが、じっくり腰を据えて取り組めば、必ず修得することができる。

本書は「なるほど数学シリーズ」の「式の導出や展開を省略しない」という趣旨にそって微分方程式の解法をまとめたものであり、高校生でも理解できるように工夫している。